Algemeines

10^{24}	E 24	yotta	Y
10^{21}	E 21	zetta	Z
10^{18}	E 18	exa	E
10^{15}	E 15	peta	P
10^{12}	E 12	tera	T
10^{9}	E 9	giga	G
10^{6}	E 6	mega	M
10^{3}	E 3	kilo	k
10^{2}	E 2	hecto	h
10^{1}	E 1	deca	da
10^{-1}	E -1	deci	d
10^{-2}	E -2	centi	c
10^{-3}	E -3	milli	m
10^{-6}	E -6	micro	µ
10^{-9}	E -9	nano	n
10^{-12}	E-12	pico	p
10^{-15}	E-15	femto	f
10^{-18}	E-18	atto	a
10^{-21}	E-21	zepto	z
10^{-24}	E-24	yocto	y

Falultät :

$$4! = 1*2*3*4$$
$$n! = 1*2*...*n$$
$$-3! = -6$$
$$-2! = -2$$
$$-1! = -1$$
$$0! = 1$$
$$1! = 1$$
$$2! = 2$$
$$3! = 6$$

quadratische Gleichungen:

$$a*x^2 + b*x + c = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4*a*c}}{2*a}$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)*\cos(y) + \cos(x)*\sin(y)$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)*\cos(y) - \sin(x)*\sin(y)$$

$$a^{x+y} = a^x * a^y$$
$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$
$$\sqrt{a^x} = a^{\frac{x}{2}}$$
$$x^4 * x^6 = x^{10}$$
$$x^{2^4} = x^8$$
$$\log(u*v) = \log(u) + \log(v)$$
$$\log\left(\frac{u}{v}\right) = \log(u) - \log(v)$$
$$\log\left(\frac{1}{v}\right) = -\log(v)$$
$$\log(u^v) = v*\log(u)$$
$$\log_y(x) = \frac{\log_z(x)}{\log_z(y)}$$
$$x^{\log(y)} = y^{\log(x)}$$
$$e^x = y \quad \equiv \quad x=\ln(y)$$

$$\ln(2) = 5 \qquad / e^{(\,)}$$
$$2 = e^5$$

$$e^2 = 5 \qquad / \ln$$
$$2 = \ln(5)$$

$$e^{\ln(x)} = x$$
$$\ln(e^x) = x$$
$$\frac{x}{\sqrt{x}} = x$$

$$\sqrt{a}*\sqrt{b} = \sqrt{a*b}$$
$$\sqrt{a}*\sqrt{a} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$
$$\sqrt{b^{128}} = b^{64}$$
$$a*\sqrt{b} = \sqrt{a^2*b}$$

$$\log\left(x+1\right)^{0.5} = \log\left(0.5\right) \qquad /\text{entlog}$$
$$\left(x+1\right)^{0.5} = 0.5$$

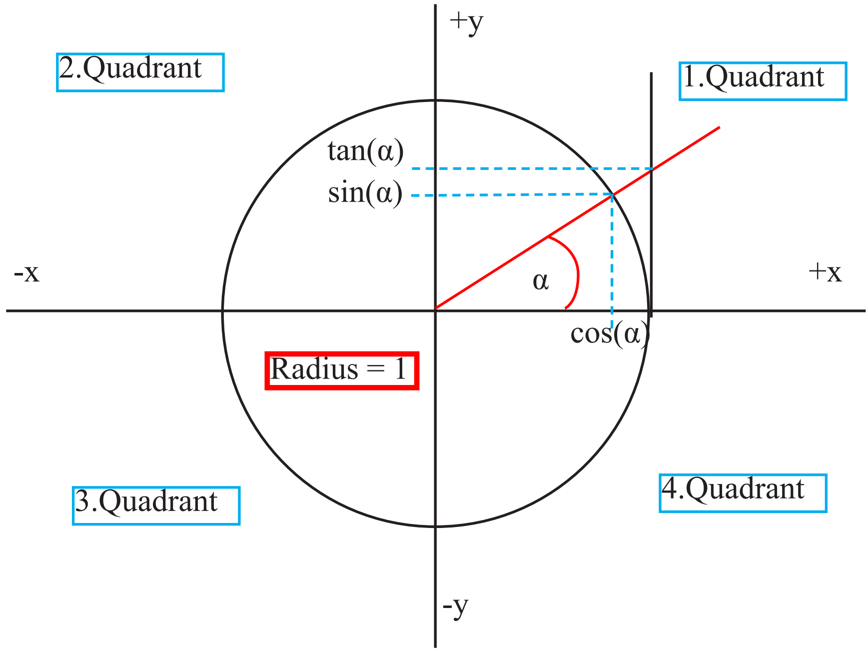
$$2*x = \ln(y) \qquad /e^0$$
$$e^{2*x} = |y|$$

Algemeines

Griechische Buchstaben:

klein	gross	Name
α	Α	alpha
ß	Β	beta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ψ	Ψ	psi
ε	Ε	epsilon
ρ	Ρ	rho
τ	Τ	tau
ζ	Ζ	zeta
ι	Ι	iota
ω	Ω	omega
π	Π	pi
σ	Σ	sigma
φ	Φ	phi
θ	Θ	theta
η	Η	eta
κ	Κ	kappa
λ	Λ	lambda
υ	Υ	ypsilon
ξ	Ξ	xi
ο	Ο	Omikron
χ	Χ	chi
ν	Ν	ny
μ	Μ	my

Algemeines



	1.Quadrant	2.Quadrant	3.Quadrant	4.Quadrant
Sin α	+	+	-	-
Cos α	+	-	-	+
Tan α	+	-	+	-
Cot α	+	-	+	-

	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
Sin α	0	0.707	1	0.707	0	-0.707	-1	-0.707	0
Cos α	1	0.707	0	-0.707	-1	-0.707	0	0.707	1
Tan α	0	1	∞	-1	0	1	∞	-1	0
Cot α	∞	1	0	-1	∞	1	∞	-1	∞

	-4*π	-3*π	-2*π	-π	0	π	2*π	3*π	4*π
sin	0	0	0	0	0	0	0	0	0
cos	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
tan	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Algemeines

Ellipse:

$$\text{Fläche} = a * b * \pi$$

Kreis:

$$\text{Fläche } A = \frac{d^2 * \pi}{2} = \pi * r^2$$

$$\text{Umfang} = d * \pi = 2 * r * \pi$$

Kugel:

$$\text{Oberfläche } A = 4 * \pi * r^2$$

$$\text{Volumen } V = \frac{4}{3} * \pi * r^3$$

Kegel:

$$\text{Volumen } V = \frac{\pi}{3} * r^2 * h$$

$$\text{Oberfläche} = \pi * r^2 (\text{Kriesfläche}) + \pi * r * s(\text{Mantel})$$

Pyramide:

$$\text{Volumen } V = \frac{\text{Grundfläche} * h}{3}$$

$$\sinh(-x) = -\sinh x$$

$$\cosh(-x) = \cosh x$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x * \cosh y + \cosh x * \sinh y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x * \cosh y + \sinh x * \sinh y$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \sinh x$$

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\sin(\alpha) = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$\tan(\alpha) = \cot(90^\circ - \alpha)$$

$$\cot(\alpha) = \tan(90^\circ - \alpha)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{1}{\cot(\alpha)}$$

$$\tan(\alpha) * \cot(\alpha) = 0$$

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$$

$$\frac{1}{\sin^2(\alpha)} = 1 + \cot^2(\alpha)$$

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin(\alpha) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$

Algemeines

	sinα	cosα	tanα	cotα
sinα		$\sqrt{1 \square \cos^2 \square}$	$\frac{\tan \square}{\sqrt{1+\tan^2 \square}}$	
cosα	$\sqrt{1 \square \sin^2 \square}$		$\frac{1}{\sqrt{\tan^2 \square + 1}}$	
tanα	$\frac{\tan \square}{\sqrt{1 \square \sin^2 \square}}$	$\frac{\sqrt{1 \square \cos^2 \square}}{\cos \square}$		$\frac{1}{\cot \square}$
cotα	$\frac{\sqrt{1 \square \sin^2 \square}}{\sin \square}$	$\frac{\cos \square}{\sqrt{1 \square \cos^2 \square}}$	$\frac{1}{\tan \square}$	

Alle 3 Winkel eines beliebigen Dreiecks ergeben immer 180°

Bogenmass= $\frac{\pi * \text{Gradmass}}{180}$

Gradmass= $\frac{180 * \text{Bogenmass}}{\pi}$

Eine umdrehung hat immer 2*π

Reduktionsformeln:

90°-α	sin(90°-α) = cosα tan(90°-α) = cotα	cos(90°-α) = sinα cot(90°-α) = tanα
90°+α	sin(90°+α) = cosα tan(90°+α) = -cotα	cos(90°+α) = -sinα cot(90°+α) = -tanα
180°-α	sin(180°-α) = sinα tan(180°-α) = -tanα	cos(180°-α) = -cosα cot(180°-α) = -cotα
180°+α	sin(180°+α) = -sinα	cos(180°+α) = -cosα
360°-α	sin(360°-α) = -sinα	cos(360°-α) = cosα
-α	sin(-α) = -sinα tan(-α) = -tanα	cos(-α) = cosα cot(-α) = -cotα

Algemeines

$$\sin\left(x_1 \pm x_2\right) = \sin(x_1) * \cos(x_2) \pm \cos(x_1) * \sin(x_2)$$

$$\cos\left(x_1 \pm x_2\right) = \cos(x_1) * \cos(x_2) \pm \sin(x_1) * \sin(x_2)$$

$$\tan\left(x_1 \pm x_2\right) = \frac{\tan(x_1) \pm \tan(x_2)}{1 \pm \tan(x_1) * \tan(x_2)}$$

$$\cot\left(x_1 \pm x_2\right) = \frac{\cot(x_1) * \cot(x_2) \pm 1}{\cot(x_2) \pm \cot(x_2)}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}} = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$\sin\left(2 * x\right) = 2 * \sin(x)\cos(x)$$

$$\sin\left(2 * x\right) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2 * \sin^2(x) = 2 * \cos^2(x) - 1$$

$$\tan(2 * x) = \frac{2 * \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

$$\sin(3 * x) = 3 * \sin(x) - 4 * \sin^3(x)$$

$$\cos(3 * x) = 4 * \cos^3(x) - 3 * \cos(x)$$

$$\tan(3 * x) = \frac{3 * \tan(x) - \tan^3(x)}{1 - 3 * \tan^2(x)}$$

$f(x,y)$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ heissen die partiellen Ableitungen von f(x,y)

man schreibt auch fx, fy

fxy = fyx

kritische Stellen:

$$f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$f'(y) = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Kandiaten (x_1, y_1) ....(x_n, y_n):

bilde D(x,y) = fxx*fyy − (fxy)^2

$D(x_k, y_k) > 0$ Extremalstelle $fxx(x_k, y_k) > 0$ lokales Minimum

$fxx(x_k, y_k) < 0$ lokales Maximum

$D(x_k, y_k) < 0$ Sattel

$[D(x_k, y_k) = 0$ unbestimmt$]$

Algemeines

f ‘(x)>0 für alle x Werte des Intervalls :
streng monoton wachsend im Intervall

f ‘(x)<0 für alle x Werte des Intervalls :
streng monoton fallend im Intervall

f ‘(x)=0 Extremalstelle Lokales Minimum oder Maximum.

f “(x)<0 alle x vom Intervall sind rechtsgekrümmt

f “(x)>0 alle x vom Intervall sind linksgekrümmt

f “(x)=0 Wendepunkt

f ‘(x)=0 und f“(x)<0 lokales Maximum

f ‘(x)=0 und f“(x)>0 lokales Minimum

$$\mathbf{e^{i*\pi} = -1}$$
$$\mathbf{i^0 = 1}$$
$$\mathbf{i^1 = i}$$
$$\mathbf{i^2 = -1}$$
$$\mathbf{i^3 = -i}$$
$$\mathbf{i^4 = 1}$$
$$\mathbf{i^5 = i}$$
$$\mathbf{\ldots -1, -i, 1, i \ldots}$$

Schnittwinkel von 2 Kurven:

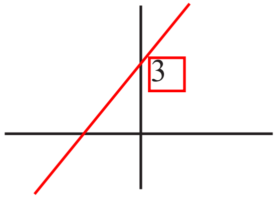
$$\mathbf{\arctan\left(\left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 * m_2}\right|\right)}$$

$\mathbf{m_1}$ **= Steigung der ersten Kurve**

$\mathbf{m_2}$ **= Steigung der zweiten Kurve**

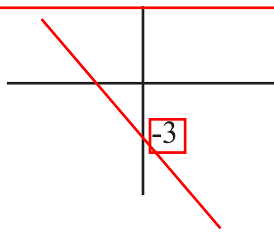
$\mathbf{m_1 * m_2 = -1}$ **dann ist der Winkel 90°**

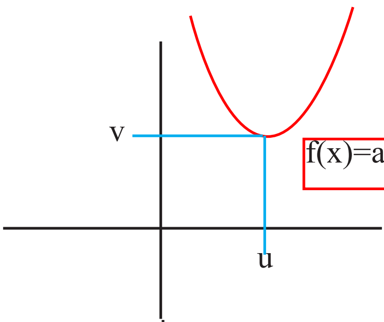
Positive Steigung, positive Verschiebung
f(x)=a*x+3



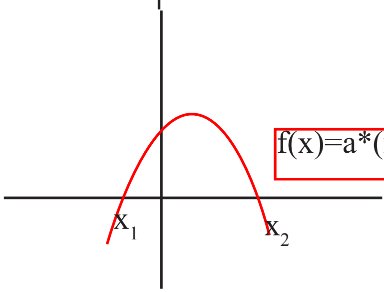
Steigung :
$$\mathbf{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$
Steigungswinkel :
$$\mathbf{ArcTang\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}$$

negative Steigung, negative Verschiebung
f(x)=-a*x-3





$f(x)=a*(x-u)^2+v$



$f(x)=a*(x-x_1)(x-x_2)$

2.Ordnung:
$a*x^2 + b*x + c$

3.Ordnung:
$a*x^3 + b*x^2 + c*x + d$

4.Ordnung:
$a*x^4 + b*x^3 + c*x^2 + d*x + e$

Taylor-Reihe:

$$T(x) = a_0 + a_1 * (x - x_0) + a_2 * (x - x_0)^2 + a_3 * (x - x_0)^3 + ... + a_n * (x - x_0)^n$$

$$f(x_0) = T(x_0)$$

$$f'(x_0) = T'(x_0)$$

$$f''(x_0) = T''(x_0)$$

$$f^n(x_0) = T^n(x_0)$$

$$a_0 = f(x_0)$$

$$a_1 = f'(x_0)$$

$$a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$$

$$a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}$$

$$a_4 = \frac{f''''(x_0)}{4!}$$

$$a_n = \frac{f^n(x_0)}{n!}$$

$n!$ = Fakultät

TR: !

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^k * (x_0)}{k!} * (x - x_0)^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int \sin^{2*k}(t) * dt = \int \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sin^{2*k}(t) \right] * dt$$

$\sum$ und $\int$ vertauschen immer gestattet!

Achtung:
Bei Taylorreihe zu Potenzreihe -> fakultäten belassen

verknüpfte Integrationsregeln:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx \quad = \int_a^b (f(x)dx \pm \int_a^b g(x))dx$$

$$\int_a^b (c * f(x))dx \quad = c * \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \quad = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \quad = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Algemeines

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arcsinh}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arccosh}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arctanh}(x) + C$$

$$\int (g(x)+h(x)) = \int g(x) + \int h(x)$$

$$\int (a * g(x)) = a * \int g(x)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} = |\ln f(x)| + C$$

$$\int e^{x*y} dx = \frac{1}{y} * e^{x*y}$$

$$\int x^r = \frac{1}{r+1} * x^{r+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} = \ln x + C$$

$$\int \sin(x) = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x) = \sin(x) + C$$

$$\int \tan(x) = -\operatorname{Ln}(\cos(x)) + C$$

$$\int e^x = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x) + C$$

$$\int \sinh(x) = \cosh(x) + C$$

$$\int \cosh(x) = \sinh(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} = \tan(x) + C$$

$$\int x^r = \frac{1}{r+1} * x^{r+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} = \ln x + C$$

$$\int \sin(x) = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x) = \sin(x) + C$$

$$\int e^x = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x) + C$$

$$\int \sinh(x) = \cosh(x) + C$$

$$\int \cosh(x) = \sinh(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} = \tan(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arcsinh}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arccosh}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arctanh}(x) + C$$

$$\int (g(x)+h(x)) = \int g(x) + \int h(x)$$

$$\int (a * g(x)) = a * \int g(x)$$

Algemeines

Fläche zwischen Graphen und x-Achse A, f(x) $\geq$ 0:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Differentia lg leichung :

$$y(x) = \int_{x0}^{x} f(u)du$$

Volumen bei Rotationskörpern:

$$V = \pi * \int_a^b f^2(x)dx$$

Länge s des Graphen:

$$s = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

empirische Mittelwert $\bar{x}$:

$$x = \int_{a0}^{ar} x * f(x)dx$$

Mantelfläche M:

$$M = 2 * \pi * \int_a^b f(x) * \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

Lineare Differentialgleichungen:
$y'+p(x)*y = 0$ ->Homogen
$y'+p(x)*y = q(x)$ ->Inhomogen
q(x)= partikuläre Lösung

1.Ordung y'
2.Ordnung y''
.....

$$\int_{Anfang}^{Ende} = \int Ende - \int Anfang$$

Algemeines

Substitutionsmethode:

Bei einem besimmten Integral kann auf die Rücksubstitution verzichtet werden, wen man die Integrationsgrenzen der Substitutinsgleichung mitsubstituiert.

$$\int fg(x))*g'((x)dx = \int f(u)du$$

$$\int_a^b fg(x))*g'((x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Achtung: Beim unbestimmten Integral (keine Grenzen) C nicht vergessen!

Substitutionsmethode:

Bei einem besimmten Integral kann auf die Rücksubstitution verzichtet werden, wen man die Integrationsgrenzen der Substitutinsgleichung mitsubstituiert.

$$\int fg(x))*g'((x)dx = \int f(u)du$$

$$\int_a^b fg(x))*g'((x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Bsp.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^4 * \cos(x) * dx$$

Substitution: $u = \sin(x),\quad \frac{du}{dx} = \cos(x),\quad dx = \frac{du}{\cos(x)}$

unter Grenze: $x = 0 \qquad u = \sin(0) = 0$

obere Grenze: $x = \frac{\pi}{2} \qquad u = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^4 * \cos(x) * dx = \int_0^1 u^4 * \cos(x) * \frac{du}{\cos(x)} = \int_0^1 u^4 * du = \frac{1}{5} u^5 \Big|_0^1$$

mit Rücksubstitution :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^4 * \cos(x) * dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^4 * \cos(x) * \frac{du}{\cos(x)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^4 * du = \frac{1}{5} u^5 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{Rücksubstitution} := \frac{1}{5}\sin(x)^5 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int \frac{6*x^2}{\left(1-4*x^3\right)^3} * dx$$

$$u = 1-4*x^3 \qquad \frac{du}{dx} = -12*x^2 \qquad dx = \frac{du}{-12*x^2}$$

$$\int \frac{6*x^2}{\left(1-4*x^3\right)^3} * dx = \int \frac{6*x^2}{u^3} * \frac{du}{-12*x^2} = -\frac{1}{2} * \int \frac{1}{u^3} * du$$

$$-\frac{1}{2} * \int \frac{1}{u^3} * du = -\frac{1}{2} * \frac{u^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{4*u^2} + C$$

Rücksubstitution :

$$\frac{1}{4*\left(1-4*x^3\right)^2} + C$$

Substitution :

$$\int_0^{x0} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$u = x^2 + 1$$

$$du = 2*x*dx \qquad dx = \frac{du}{2*x}$$

$$\int_0^{x0} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{2} * \int_{f(0)=x^2+1}^{x^2+1} \frac{1}{\sqrt{u}} * du = \frac{1}{2} * \frac{\sqrt{u}}{0.5}\Bigg|_1^{x^2+1}$$

oder

$$= \int_0^{x0} \frac{x}{\sqrt{u}} * dx = \int_0^{x0} \frac{x}{\sqrt{u}} * \frac{du}{2*x} = \frac{1}{2} * \int_0^{x0} \frac{1}{\sqrt{u}} * d$$

da $\frac{1}{2}*2*x=x$

$$= \sqrt{x^2+1} - 1$$

Partielle Integration:

Der Integrand f(x) wird in "geeigneter" Weise in ein Prdukt aus zwei Funktionen u(x) und v'(x) zerlegt.

In einigen Fällen muss man mehrnmals hintereinender partiell integrieren, ehe man auf ein Grundintegral stösst.

$$\int u(x) * v'(x)\, dx = u(x) * v(x) - \int u'(x) * v(x)\, dx$$

$$\int_a^b u(x) * v'(x)\, dx = u(x) * v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) * v(x)\, dx$$

v‘ besser zum integrieren.
u besser zum differenzieren.
u‘ sollte die Integration vereinfachen!!!!!

Bsp.

$$\int x * \cos(x) * dx$$

$u(x) = x \quad \rightarrow$ **Differenziert** $\quad u'(x) = 1$

$v'(x) = \cos(x) \quad \rightarrow$ **Integriert** $\quad v(x) = \sin(x)$

$$\int x * \cos(x) * dx = x * \sin(x) - \int 1 * \sin(x) * dx$$

$$= x * \sin(x) + \cos(x) + C$$

Achtung: Beim unbestimmten Integral (keine Grenzen) C nicht vergessen!

Bsp.

$$\int_0^\pi x^2 * \cos(x) * dx$$

$u(x) = x^2 \quad \rightarrow$ **Differenziert** $\quad u'(x) = 2 * x$

$v'(x) = \cos(x) \quad \rightarrow$ **Integriert** $\quad v(x) = \sin(x)$

$$= x^2 * \sin(x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi 2 * x * \sin(x) * dx$$

$u(x) = 2 * x \quad \rightarrow$ **Differenziert** $\quad u'(x) = 2$

$v'(x) = \sin(x) \quad \rightarrow$ **Integriert** $\quad v(x) = -\cos(x)$

$$= x^2 * \sin(x) \Big|_0^\pi - \left(2 * x * (-\cos(x)) - \int_0^\pi 2 * -(\cos(x)) * dx \right)$$

$$= x^2 * \sin(x) \Big|_0^\pi - \left(2 * x * (-\cos(x)) - (-2 * \sin(x)) \right) \Big|_0^\pi$$

$$= x^2 * \sin(x) \Big|_0^\pi - \left(2 * x * (-\cos(x)) + 2 * \sin(x) \right) \Big|_0^\pi$$

$$= x^2 * \sin(x) + 2 * x * \cos(x) - 2 * \sin(x) \Big|_0^\pi$$

Partialbruchzerlegung:

Beispiel: $\frac{2}{1\text{-}x^2}$

1.Polynomdivision, Falls Grad des Nenners < als Grad des Zähler

2.Nenner in faktoren zerlegen und Nullstellen berechnen:

$1\text{-}x^2 = 0 \quad$ **Nullstellen** $\quad x = -1 \quad x = 1$

$$1\text{-}x^2 = -(x-1)*(x+1)$$
$$= (1-x)*(1+x)$$

3.Ansatz:

$$\frac{\boxed{2}}{1\text{-}x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}$$

4.A und B berechnen:

$$\frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} = \frac{A*(1+x)+B*(1-x)}{(1-x)*(1+x)} = \frac{2}{1\text{-}x^2}$$

$$2 \equiv A*(1+x)+B*(1-x)$$

$$2 \equiv (A-B)*x+A+B$$

$A - B = 0 \qquad$ **// keine x Anteile**

$A + B = \boxed{2} \qquad$ **A=1 B=1**

5.A und B einsetzen:

$$\frac{2}{1\text{-}x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$$

6.Integrieren mit Ln (Brüche)

$$y''*\cos(x)+y'*\sin(x)=0$$

substituieren :

$$u=y' \qquad u'=y''$$

$$u'*\cos(x)+u*\sin(x)=0$$

$$u'=-u*\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$u'=\frac{du}{dx}$$

$$1*\frac{du}{dx}=-u*\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\int\frac{1}{u}du=-\int\frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$$

$$\ln|u|=\ln|\cos(x)|+C$$

$$u=K*\cos(x)$$

rücksubstituon :

$$y'=K*\cos(x) \qquad y=K*\sin(x)+C$$

Substituieren bei Differentialgleichungen:

$$y''+a*y'=0$$

$$u=y'$$

$$u'+a*u=0$$

$$\frac{du}{dt}=-au$$

$$\int\frac{1}{u}*du=\int -a*dt$$

$$\ln u=-a*t+C$$

$$u(t)=K*e^{-a*t}$$

$$y(t)=\int u(t)=\int K*e^{-a*t}=-\frac{K}{a}*e^{-a*t}+C_1$$

Algemeines

$y'' + a*y' + b*y = 0$ **homogene Differentialgleichung**

$y'' + a*y' + b*y = f(x)$ **inhomogene Differentialgleichung**

a,b sind Konstanten

f(x) ist die Störfunktion

1. die charakteristische Gleichung erstellen:

$$y'' + a*y' + b*y = 0$$

$$\downarrow$$

$$\lambda^2 + a*\lambda^1 + b*\lambda^0 = 0$$

2. mögliche Fälle für die Lösung:

1. $y(x) = C_1 * e^{\lambda_1 * x} + C_2 * e^{\lambda_2 * x}$ λ_1, λ_2 **zwei reelle Lösungen**
2. $y(x) = (C_1 * x + C_2) * e^{\lambda * x}$ $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ **eine reelle Doppellösung**
3. $y(x) = e^{r*x} * (C_1 * \cos(w*x) + C_2 \sin(w*x))$
   $\lambda = r \pm i*w$ **zwei konjugiert komplexe Lösungen**

konstante Funktion:

$y_p = c_0$ **Parameter:** c_0

Polinom, oder lineare Funktion:

$y_p = c_0 + c_1 * x + ... + c_n * x^n$ **Parameter:** $c_0 ... c_n$

Trigonometrische Funktion:

$g(x) = A * \sin(\omega * x)$

$g(x) = B * \sin(\omega * x)$

$g(x) = A * \sin(\omega * x) + y_p = B * \cos(\omega * x)$

$y_p(x) = C_1 * \sin(\omega * x) + C_2 * \cos(\omega * x)$ **Parameter :** C_1, C_2

oder $C * \sin(\omega * x + \delta)$ **Parameter :** C, δ

e-Funktion:

$g(x) = A * e^{b*x}$

$y_p = C * e^{b*x} e$ $y_p = C * e^{b*x} e$ **Parameter C**

Algemeines

$x'' - 4 * x = t^3 - 1$

$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

1.homogene Lösung :

$x'' - 4 * x = 0$

charkteristisch Gleichung :

»^{2} - 4 = 0   »$_1$ = 2   »$_2$ = -2

$x_h(t) = C_1 * e^{2*t} + C_2 * e^{-2*t}$

2.partikuläre Lösung :

Partikuläre Lösung ist immer im Lösungsformel gleichen Grades (gleicher Form)

wie $x_p(t)$ **bei** $x_p(x) = \sin(x) + \cos(x)$ **dann** $x_p(x) = A * \cos($É$ * x) + B * \sin($É$ * x)$

Ansatz Parametervergleich :

$x_p(t) \quad = \; b_0 + b_1 * t + b_2 * t^2 + b_3 * t^3 \quad = \quad t^3 - 1$

$b_0 = -1$

$b_1 = 0$

$b_2 = 0$

$b_3 = 1$

$y_p = a * x^3 + b * x^2 + c * x + d \qquad y_p' = 3 * a * x^2 + 2 * b * x + c$

$y_p'' = 6 * a * x + 2 * b$

$y_p'' - 4 * y_p = t^3 - 1$

$6 * a * x + 2 * b - 4 * (a * x^3 + b * x^2 + c * x + d) = t^3 - 1$

ausmultipliziert :

$6 * a * x + 2 * b - 4 * a * x^3 - 4 * b * x^2 - 4 * c * x - 4 * d = t^3 - 1$

zusammenfassen Parametervergleich :

$$\begin{pmatrix} 6 * a - 4 * c = 0 \\ -4 * a = 1 \\ -4 * b = 0 \\ 2 * b - 4 * d = -1 \end{pmatrix} \qquad \left| \begin{array}{c} a = -\frac{1}{4} * x^3 \\ b = 0 * x^2 \\ c = -\frac{3}{8} * x \\ d = \frac{1}{4} \end{array} \right|$$

$x_p(t) = -\frac{1}{4} * x^3 - \frac{3}{8} * x + \frac{1}{4}$

$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C_1 * e^{2*t} + C_2 * e^{-2*t} - \frac{1}{4} * x^3 - \frac{3}{8} * x + \frac{1}{4}$

Formen von Differentialgleichungen:

1. Ordnung:

Differentialgleichung 1.Ordnung mit trennbaren Variablen:

$y' = f(x) * g(x)$

Lineare Differentialgleichung 1. Ordung:

$y' + f(x) * y = g(x)$

g(x) = Störglied oder Störfunktion wird für die "partikuläre" Lösung gebraucht

homogen:

$y' + f(x) * y = 0$

inhomogen:

$y' + f(x) * y = g(x)$

Differentialgleichung 2.Ordnung:

Lineare Differentialgleichung 2. Ordung mit konstanten Koeffizienten:

$y'' + a * y' + b * y = g(x)$

Differnzieren mit trennbaren Veränderlichen:

ist die Gleichung von der Bauart : $y' = g(x) * h(y)$ **, dann:**

Beispiel $y' = -2 * x * y^2 \;, \quad y(0) = 1$

1.Variablen "sortieren":

$y' = -2 * x * y^2 \qquad |: y^2$

2.y' selektieren und ersetzen:

$y' * \frac{1}{y^2} = -2 * x \qquad |y' = \frac{dy}{dx} \qquad dy=y'*dx$

$\frac{1}{y^2} * \frac{dy}{dx} = -2 * x$

$\frac{1}{y^2} * dy = -2 * x * dx \qquad |\int$ **beidseitiges integrieren**

3.beidseitiges Integrieren:

$\int \frac{1}{y^2} * dy = \int -2 * x * dx$

$-\frac{1}{y} = -x^2 + C$

$y = \frac{1}{x^2 - C}$

4.C mit der Anfangsbedingung errechnen

$1 = \frac{1}{0^2 - C} \qquad |C = -1$

ist linear, wenn sie folgende Gestalt hat: $y' + p(x) * y = q(x)$

$p(x)$ **und** $q(x)$ **sind Funktionen, die nur von x aber nicht von y abhängig sind.**

homogene Differentialgleichung, wenn $q(x) = 0$

inhomogen, wenn $q(x) \neq 0$.

Beispiel: $y' + \tan(x) * y = 2 * \sin(x) * \cos(x)$

1.homogener Teil lösen (alles was von y abhängt)

$$y' + \tan(x) * y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\tan(x) * y \qquad | *dx \quad :y$$

$$\int \frac{1}{y} * dy = \int -\tan(x) * dx$$

$$\ln|y| = \int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} * dx$$

$$\ln|y| = \ln|\cos(x)| + C \qquad | e^{()}$$

$$y = K * \cos(x)$$

$$y(x) = K(x) * \cos(x)$$

2.Variation der Konstanten:

Ansatz: $y = K(x) * \cos(x) \quad \rightarrow$ **Störfunktion**

$$y' = \int K(x) * \cos(x) = K'(x)*\cos(x) - K(x)*\sin(x)$$

3.Einsetzen in der Differentialgleichung:

$$\underbrace{K'(x)*\cos(x) - K(x)*\sin(x)}_{y'} + \tan(x)*\underbrace{K(x)*\cos(x)}_{y} = 2*\sin(x)*\cos(x)$$

$$K'(x)*\cos(x) - K(x)*\sin(x) + K(x)*\sin(x) = 2*\sin(x)*\cos(x)$$

$$K'(x) = 2 * \sin(x)$$

$$K(x) \rightarrow \text{integrieren} \rightarrow \int 2 * \sin(x)$$

$$K(x) = -2 * \cos(x) + C$$

$$y(x) = (-2 * \cos(x) + C) * \cos(x)$$

Allgemeines:

$$2*x=\ln(y) \qquad /e^{0}$$

$$e^{2*x}=|y|$$

$$e^{y}=e^{x} \qquad /\ln()$$

$$y=\ln(e^{x}+C)$$

$$\ln(y)=\ln(x)+\frac{1}{x}+C \qquad /e^{0}$$

$$y=K*x+e^{\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\int e^{n*x}=\frac{1}{n}*e^{n*x}$$

$$K'*e^{-x}=e^{x}$$

$$K'=e^{2*x}$$

$$\int e^{2*x}dx=\frac{1}{2}*e^{2*x}+C$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

$$\cot=\frac{\cos}{\sin}$$

$$\int \ln(x)*dx=x*\ln(x)-x+C$$

$$\int e^{2*t}*dt=\frac{e^{2*t}}{2}+C$$

$$\ln|x|-\ln|x+1|+C_2=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C_2$$

$$2*\ln|x|=\ln|x|^{2}$$

$$\cot(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$\ln|x|+\frac{1}{x}+C \qquad |e^{()}$$

$$=x*e^{\frac{1}{2}}*e^{C}$$

$$\int -\frac{1}{x^{2}}=\frac{1}{x}+C$$

$$\int \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}=\ln(\text{Nenner}),\ \text{falls Nenner'=Zähler}$$

$$4*\ln|x^{2}-x+1|+C \qquad |e^{()}$$

$$=\left(x^{2}-x+1\right)^{2}*K$$

$$-\frac{1}{3}*\ln|x|+C=\ln|x|^{-\frac{1}{3}}+C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}=2*\sqrt{x}+C$$

$$\int \frac{\text{natürliche Zahl n}}{x}=\ln(x^{n})=n*\ln(x)$$

$$\int \frac{1}{t^{3}}+\frac{2}{t^{2}}-\frac{3}{t}=-\frac{1}{2*t^{2}}-\frac{2}{t}-**\ln(t)$$

$$\int 3*x^{2}-2*x+3=x^{3}-x^{2}+3*x$$

$$\int \frac{1}{(1-x)^{2}}=\frac{-1}{x-1}$$

$$\int \frac{1}{(1-x)^{3}}=\frac{1}{2*(x-1)^{2}}$$ bei geradem Exponent kein -

$$\text{DoppelIntegral}\int_{a}^{b}\int_{x^{2}}^{\sqrt{4-x^{2}}}1*dy*dx=\int_{a}^{b}\left(\sqrt{4-x^{2}}\right)-\left(x^{2}\right)*dx$$

Ableitungsregeln:

Summenregel:

$$f(x) = g(x) + h(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

Produktregel:

$$f(x) = c * g(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = c * g'(x)$$

$$f(x) = g(x) * h(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = g'(x) * h(x) + g(x) * h'(x)$$

Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \rightarrow f'(x) = \frac{g'(x) * h(x) - g(x) * h'(x)}{\left(h(x)\right)^2}$$

Kettenregel:

$$f(x)=g\left(h(x)\right) \quad \rightarrow f'(x) = g'\left(h(x)\right) * h'(x)$$

Äussere abgleietet von der Inneren, mal die Innere abgeleitet

Bei mehreren Ineinader:

$$a(b(c(d(x)))) \quad \rightarrow a'(b(c(d(x)))) * b'(c(d(x))) * c'((d(x)) * d'$$

$$f(x) = e^x \quad \rightarrow \quad f'(x) = e^x$$

$$f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}} \quad \rightarrow \quad f'(x) = -x * e^{\frac{-x^2}{2}}$$

$$f(x) = e^{2*x+5*x^2} \quad \rightarrow f'(x) = \left(10 * x + 2\right) * e^{2*x+5*x^2}$$

$$f(x) = x^r \quad \rightarrow \quad f'(x) = r * x^{r-1}$$

$$f(x) = \sin(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \cos(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = -\sin(x)$$

$$f(x) = e^x \quad \rightarrow \quad f'(x) = e^x$$

$$f(x) = \ln x \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

Ableitungsregeln:

$$\tan(x)' = \frac{1}{\cos^2(x) * x} = 1 + \tan^2(x)$$

$$\cot(x)' = \frac{1}{\sin^2(x) * x} = -1 + \cot^2(x)$$

$$\arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\arccos(s)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\arctan(x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\operatorname{arc}\cot(x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

$$a^x{}' = (\ln a) * a^x$$

$$\log_a x' = \frac{1}{(\ln a) * x}$$

$$\sinh(x)' = \cosh(x)$$

$$\cosh(x)' = \sinh(x)$$

$$\tanh(x)' = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$$

$$\coth(x)' = -\frac{1}{\sinh^2(x)} = 1 - \coth^2(x)$$

$$\arcsin h(x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\arccos h(x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\operatorname{arctanh}(x)' = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$\operatorname{aarc}\coth(x)' = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$x^n{}' = n * x^{n-1}$$

$$\sin(x)' = \cos(x)$$

$$\cos(x)' = -\sin(x)$$

$$\tan(x)' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

$$\cot(x)' = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$$

$$e^x{}' = e^x$$

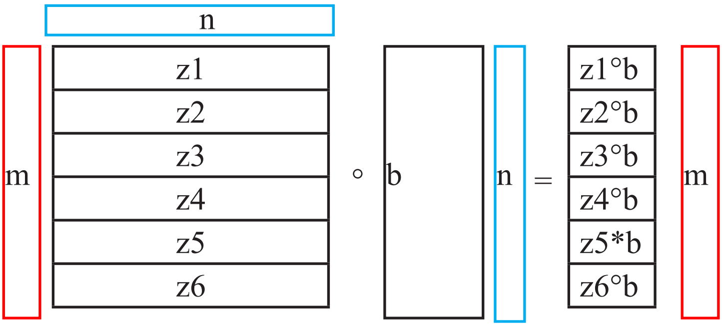
$$\ln(x)' = \frac{1}{x}$$

Matrizen :

3 Zeilen, 5 Spalten = 3*5 Matrix (m*n Matrix)

Zeilenvektor * Spaltenvektor

$$[V_1, V_2, ..., V_n] * \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ ... \\ U_m \end{bmatrix} = V_1 * U_1 + V_2 * U_2 + ... + V_n * U_m$$



$$5 * x - 3 * y + z = 7$$

$$-x + 2 * y = 3$$

$$x - y + 2 * z = -1$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A * x = b$$

$$R * I = U$$

TI :

rref([3, −3, 1, 7; −1, 2, 0, 3; 1, −1, 2, −1])

Mathematca :

RowReduce[{{3, −3, 1, 7}, {−1, 2, 0, 3}, {1, −1, 2, −1}}]

keine Lösung, wenn eine Zeile in Matrix 0 0 ... 0 1 vorkommt

Reduzierte Zeilenstaffelform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zwei freie Unbekannte:

$$x_1 = 5$$

$$x_2 + 3 * x_3 - 2 * x_4 = -9$$

$$x_5 = 0$$

das dazugehörige Gleichungssystem:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 * \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 * \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2 * x_1 + x_2 - x_3 = 4$$

$$x_1 + x_2 + 2 * x_3 = -3$$

$$-x_1 + 2 * x_2 + x_3 = 6$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A * x = b$$

TI−89:

Matrix – Gleichungssystem :

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

rref([3,−3,1,7; −1,2,0,3; 1,−1,2,−1])

Determinante :

det([3,−3,1,7])

Inverse A^{-1} :

$[3,-3,1,7]^{\wedge -1}$

transponierte Matrix ^{T} :

$[3,-3,1,7]^T$ MATH->4:Matrix->T

Algemeines

$$\begin{array}{cc} & p \\ m & \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{1p}} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22} \quad a_{2p}} \\ \boxed{a_{31} \quad a_{32} \quad a_{3p}} \\ \boxed{a_{m1} \quad a_{m2} \quad a_{mp}} \end{pmatrix} \end{array} * \begin{array}{cc} & n \\ p & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2n} \\ b_{p1} & b_{p2} & b_{pn} \end{pmatrix} \end{array} =$$

$$\begin{array}{cc} & n \\ m & \begin{pmatrix} a_{11} * b_{11} + a_{12} * b_{21} + a_{1p} * b_{p1} & a_{11} * b_{12} + a_{12} * b_{22} + a_{1p} * b_{p2} & \ldots \\ a_{21} * b_{11} + a_{22} * b_{21} + a_{2p} * b_{p1} & a_{21} * b_{12} + a_{22} * b_{22} + a_{2p} * b_{p2} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \end{array}$$

$\mathrm{Element}_{\mathrm{spalte,zeile}}$

Nullmatrix (0) = eine Matrize, deren Einträge alle 0 sind

Einheitsmatrix (I) = eine quadratische Matrize, deren Diagonale aus 1-ern besteht, sonst 0.

Rechenregeln für Matrizen im allgemeinen :

$A + B = B + A$

$A + (B + C) = (A + B) + C$

$A * (B + C) = A * B + A * C$

$A * (B * C) = (A * B) * C$

$A * I_n = I_n * A = A$

$A^2 = A * A$

Das Matrizenprodukt ist nicht kommutativ :

$A * B \,{}^{1}\, B * A$

$A * B = 0$ heisst nicht dass $A = 0$ oder $B = 0$

$A * A^{-1} = A^{-1} * A = I$

A^T = transponierte Matrix : Zeilen werden Spalten und Spalten werden Zeilen.

Rechenregen für quadratische Matrizen $(n \times n)$:

$$\begin{aligned} X * A &= I && | * A^{-1} \\ X * A * A^{-1} &= I * A^{-1} && | \ A * A^{-1} = I \\ X * I &= I * A^{-1} \\ X &= A^{-1} \end{aligned}$$

Die Matrix $A * X = I = X * A$ heisst die zu A inverse Matrix, wird mit A^{-1} bezeichnet.

$(A^T)^T = A$ $\qquad$ $(A * B) = B^T * A^T$

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \qquad u^T = (u_1 \quad u_2) \qquad x \circ y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x^T * y$

Sei M eine n x n Matrix. M ist genau dann invertierbar, wenn $\det(M) \,{}^{1}\, 0$ ist.

Die Inverse hat die Form :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} * W$$ mit einer bestimmten Matrix W

Algemeines

Skalarprodukt :

Ergibt den Betrag des Projektionswinkels

$$\vec{a}\circ\vec{b} = \left|\vec{a}\right| * \left|\vec{b}\right| * \cos(\varphi)$$

$$\vec{a}\circ\vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1 * y_1 + x_2 * y_2 + x_3 * y_3 = \begin{pmatrix} x_1 * y_1 \\ x_2 * y_2 \\ x_3 * y_3 \end{pmatrix}$$

positiv, wenn $\varphi < 90°$

negativ, wenn $\varphi > 90°$

null, wenn $\varphi = 90°$

Vektorprodukt oder Kreuzprodukt:

Ergibt einen Vektor.

Der Betrag des Vektors ist die Fläche der Ebene, die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgezogen ist. Der Kreuzproduktvektor steht 90° zu dieser Ebene.

$$\vec{a} \text{ x } \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 * y_3 - x_3 * y_2 \\ \square(x_1 * y_3 - x_3 * y_1) \\ x_1 * y_2 - x_2 * y_1 \end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{a} \text{ x } \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| * \left|\vec{b}\right| * \sin(\varphi)$$

Das Spatprodukt:

Das Sptprodukt ergibt das Volu□en des von 3 Vektoren aufgespannten □au□es

$$\left(\vec{a} \text{ x } \vec{b}\right)\circ\vec{c}$$

$$\left(\vec{a} \text{ x } \vec{b}\right)\circ\vec{c} = \vec{a}\circ\left(\vec{b} \text{ x } \vec{c}\right)$$

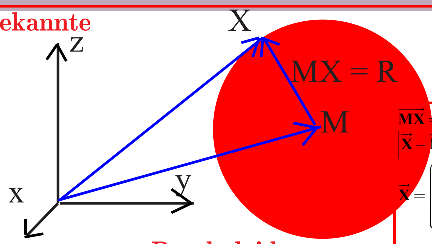
$$\left(\vec{a} \text{ x } \vec{b}\right)\circ\vec{c} = -\left(\vec{b} \text{ x } \vec{a}\right)\circ\vec{c} = -\left(\vec{c} \text{ x } \vec{b}\right)\circ\vec{a}$$

u, v, w sind Parameter x, y, z Unbekannte

Kugelgleichung :

$$R^2 = (x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2$$

$$\vec{r}(u,v) = R * \begin{pmatrix} \cos(v) * \cos(u) \\ \cos(v) * \sin(u) \\ \sin(v) \end{pmatrix}$$



$$\overrightarrow{MX} = \vec{X} - \vec{M} = R$$

$$\left|\vec{X} - \vec{M}\right| = R$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{M} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\vec{X} - \vec{M} = \overrightarrow{MX} = \begin{pmatrix} x-u \\ y-v \\ z-w \end{pmatrix}$$

$$R^2 = (x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2$$

Zylinder :

$$R(u,v) = \begin{pmatrix} r * \cos(u) \\ r * \sin(u) \\ v \end{pmatrix}$$

Paraboloid :

$$R(u,v) = \begin{pmatrix} u * \cos(v) \\ u * \sin(v) \\ u^2 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor einer Fläche :

bei Normalform $\vec{n} = \begin{pmatrix} fx(u,v) \\ fy(u,v) \\ -1 \end{pmatrix}$ oder $A * x + B * y + C * z + D = 0$ $\quad \vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$, oder $\vec{n} = \begin{pmatrix} fx \\ fy \\ fz \end{pmatrix}$

bei Parameterdarstellung $\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \ X \ \frac{\partial f}{\partial v} \right)$

Flächennormale : $= \left|\vec{n}\right|$

Tangentialebene :

bei Normalform : $\quad fx(u,v) * (x-u) + fy(u,v) * (y-v) + f(u,v) = 0$

bei Parameterdarstellung : $\quad fx(u,v) * (x - f(u)) + fy(u,v) * (y - f(v)) + fz(u,v) * (z - f(z)) = 0$

Kreis :

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$k(d) = R * \begin{bmatrix} \cos(d) \\ \sin(d) \end{bmatrix}$$

Tangentialebene :

Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$

$$\Omega : \ n_1(u) * (x-u) + n_2(v) * (y-v) + n_3(w) * (z - f(u,v)) = 0$$

Tangentialvektor einer Fläche :

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} x'(u,v,w) \\ y'(u,v,w) \\ z'(u,v,w) \end{pmatrix}$$

Winkel zwischen Kurve und Fläche (bei Vektor $\overrightarrow{V_1}$ statt Tangentialvektor) :

$$\cos(d) = \frac{\text{Tangentialvektor oder } \vec{V}_1 \circ \text{Normalenvektor}}{|\text{Tangentialvektor}| * |\text{Normalenvektor}|}$$

Winkel zwischen Geraden :

$$\cos(d) = \frac{\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| * |\vec{v}_2|}$$

Winkel zwischen zwei Ebenen :

$$\cos(d) = \frac{\overrightarrow{\text{Normalenvektor}_1} \circ \overrightarrow{\text{Normalenvektor}_2}}{\left|\overrightarrow{\text{Normalenvektor}_1}\right| * \left|\overrightarrow{\text{Normalenvektor}_2}\right|}$$

$$\text{Gradient} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix} = \text{ein Vektor der in richtung der grössten Veränderung zeigt}$$

$$E(x) = \frac{\Delta V}{\Delta x} = v'(x)$$

Arctangens:
1. und 2. Quadrant = positiv +
3. und 4. Quadrand = negativ -

Von der Normalengleichung -> Parameterdarstellung:

$$1 * x + 3 * y + 2 * z - 8 = 0$$

$$P = (x, 0, 0)$$

$$x - 8 = 0$$

$$x = 8 \qquad P = (8, 0, 0)$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \circ \vec{n} = 0 \qquad \vec{v} \circ \vec{n} = 0$$

Ebene:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u * \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + v * \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Von der Parameterdarstellung -> Normalengleichung:

$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} □ - 3 * u + v \\ 1 + u - v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} □ \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u * \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalenve□tor } \vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ X } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$1 * x + 3 * y + 2 * z + d = 0$$

$$\text{Pun□t } \begin{pmatrix} □ \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ in Ebene } 1 * □ + 3 * 1 + 2 * 0 + d = 0$$

$$d = -8$$

$$1 * x + 3 * y + 2 * z - 8 = 0$$

Allgemein

Uhrzeigersinn Winkel –

Gegenuhzeigersinn Winkel +

Kreis in 2D:

$$\vec{r}(t)=\vec{P}+R_{adius}*\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}$$

Ellipse:

$$\vec{r}(t)=\vec{P}+\begin{pmatrix}a*\cos(t)\\ b*\sin(t)\end{pmatrix}$$

Spirale:

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}R_{adius}*\cos(\text{Startwinkel}\pm 2*\pi*t)\\ R_{adius}*\sin(\text{Startwinkel}\pm 2*\pi*t)\\ k*t\end{pmatrix}$$

Äquidistante Kurven k(t) mit Abstand d:

$$\vec{k}(t)=\vec{r}(t)\pm d*|\vec{n}|$$

Niveaulinien:

$f(x,y)=C=\text{konstant}$

Niveaufläche:

$f(x,y,z)=C$ $\quad C<0$ keine Niveaufläche

$C=0$ Punkt

$C>0$ Kugel

Richtungsvektoren der Tangentialebene oder Tangentialvektoren:

$$k1:\quad f(x,u)=p=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \frac{\partial f}{\partial x}(u,v)\end{pmatrix}\qquad k2:\quad f(y,v)=q=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ \frac{\partial f}{\partial y}(u,v)\end{pmatrix}$$

$k1 \text{ x } k2=\vec{n}$

Ebene aus 3 Punkten:

$\vec{n}=\overrightarrow{AB} \text{ x } AC \qquad d=-\vec{n}\circ\vec{A}$

$\Omega=n_1*x+n_2*y+n_3*z+d=0$

Flächenschwerpunkt:

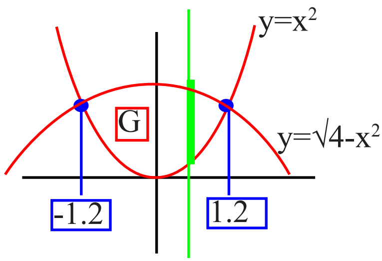
Symmetrie: $\bar{x}=0$

$$A=\int_{Gebiet} dA=\int_{-1,2}^{1,2}\int_{x^2}^{\sqrt{4-x^2}} 1*dy*dx \qquad \left(=\frac{1}{A}*\int_{-1,2}^{1,2}\left(\sqrt{4-x^2}\right)-\left(x^2\right)dx\right)$$

$$\bar{y}=\frac{1}{A}*\int_{Gebiet} y*dA$$

$$\bar{y}=\frac{1}{A}*\int_{-1,2}^{1,2}\int_{x^2}^{\sqrt{4-x^2}} y*dy*dx$$

$$\bar{x}=\frac{1}{A}*\int_{-1,2}^{1,2}\int_{x^2}^{\sqrt{4-x^2}} x*dy*dx$$



Kurvenintegral (Arbeit entlang einer Kurve):

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{K}(\vec{r}(t)) \circ \dot{\vec{r}}(t) * dt \qquad \text{wobei } \vec{r}(t) \text{ Ortsvektor}$$

Oberflächeninhalt (A):

$$\int_{v_0}^{v_1}\int_{u_0}^{u_1} \left|\vec{n}(u,v)\right| * du * dv = \int_{v_0}^{v_1}\int_{u_0}^{u_1} \sqrt{x_n{}^2 + y_n{}^2 + z_n{}^2} * du * dv$$

Oberflächenintegral (Fluss ϕ):

$$\int_{v_0}^{v_1}\int_{u_0}^{u_1} \vec{K}(\vec{r}(u,v)) \circ \vec{n}(u,v) * du * dv$$

$\vec{r}(t)$:

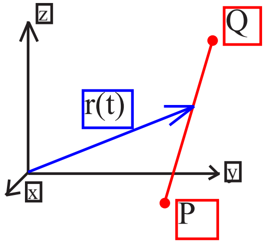
$$\vec{r}(t) = \vec{P} + t * \overrightarrow{PQ} = \vec{P} + t * \left(\vec{Q} - \vec{P}\right) \qquad 0 \le t \le 1$$

Bsp:

$$\vec{K}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 24 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{P} + t * \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 24 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 + 8 * t \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} 2 \\ -9 + 8 * t \\ f(x,y) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} * \square t$$



Fehlerrechnung:

$$\Delta t\left(\text{Fehler}\right) = \left|\frac{\partial t}{\partial x}\right| * \Delta x + \left|\frac{\partial t}{\partial y}\right| * \Delta y + \left|\frac{\partial t}{\partial z}\right| * \Delta z$$

Ungleichungen:

Nie beidseitiges Dividieren oder multiplizieren mit negativen Zahlen!

$-b < a < b \quad \rightarrow \quad a^2 < b^2$

$a * p^2 + b * p + c \le 0$

Rechung:

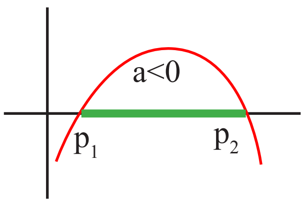
$a * p^2 + b * p + c = 0$

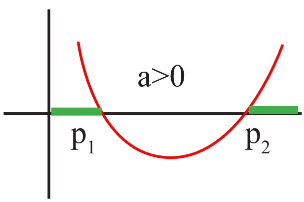
ergibt p_1, p_2

$$n * p - 2 * \sqrt{n * p * (1 - p)} \le X \le n * p + 2 * \sqrt{n * p * (1 - p)} \qquad \vert *n \; \vert -p$$

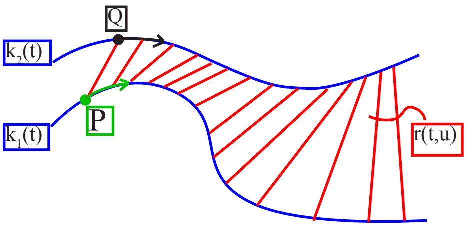
$$-\frac{2}{n} * \sqrt{n * p * (1 - p)} \le \frac{X}{n} - p \le 2 * \sqrt{n * p * (1 - p)} \qquad \vert \;{}^\wedge 2$$

$$\left(\frac{X}{n} - p\right)^2 \le \frac{4 * n * p * (1 - p)}{n^2}$$





Algemeines



1.Parametrisierung der Randkurven:

$\vec{k_1}(t),\ \vec{k_2}(t)$

2.Sei $\vec{P}(t)=\vec{k_1}(t),\quad \vec{Q}(t)=\vec{k_2}(t)$

zwei laufende Punkte auf den Randkurven

3.Parametrisierung der Strecke $\overline{PQ}$:

$$s(u)=\vec{P}(t)+u*\left(\vec{Q}(t)-\vec{P}(t)\right)$$

$$0\ \le u \le 1$$

$$t_1 \le t \le t_2$$

4.Fläche:

$$\vec{r}(t,u)=\vec{k_1}(t)+u*\left(\vec{k_2}(t)-\vec{k_1}(t)\right)$$

Verschiebung in den Nullpunkt:

Verschiebung nach $\vec{0}$ - Transf. - Zurückschieben:

$$\vec{X}^{*}=D*\left(\vec{X}-\vec{p}\right)+\vec{p}$$

$\vec{p}$ = Verschiebvektor zum Nullpunkt

Wichtig → immer in Parameterdarstellung

Drehung um $O(0,0)$ um φ:

$$D_\varphi=\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{pmatrix}$$

Geradenspiegelung an einer Geraden g durch $O(0,0)$:

g: $a*x+b*y=0$

$$R_{a,b}=\frac{1}{a^2+b^2}*\begin{pmatrix}-a^2+b^2 & -2*a*b\\ -2*a*b & a^2-b^2\end{pmatrix}$$

Streckung mit Zentrum $O(0,0)$ und Faktor λ:

$S_\lambda=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ bei ungleichmässigem Saklieren $S_\lambda=\begin{pmatrix}\mu & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$

Mehrere Matrizen:

Matrizen = $D_{-20},\ R,\ D_{45},\ S_3$

$M=S_3*D_{45}*R*D_{-20}$ Achtung gekehrte Matrix!!!!!!

Die Inverse Matrix:

Inverse Matrix ist die Rücktransformation!

Bei Drehung mit δ ist die Inverse Matrix eine Drehung mir $-\delta$

Bei Streckung mit t ist die Inverse Matrix eine Streckung mit $\frac{1}{t}$

$$M=D*R*S$$

$$M^{-1}=S^{-1}*R^{-1}*D^{-1}=(S*R*D)^{-1} \qquad (A*B)^{-1}=A^{-1}*B^{-1}$$

Drehung, dessen Drehzentrum nicht im □ordinatenursprung liegt:

1□Das Drehzentrm nach 0 verschieben $P □= P-Z$

2□Drehen $P □= D*P □= D*(P-Z)$

3□Zurücktransormieren $P □□ P □ Z=Z+P$ □

$=Z+D*(P-Z)$

Drehung um einen Vektor:

1. $a=\left|\vec{\text{Drehvektor}}\right|=\frac{\text{Drehvektor}}{\text{Betrag}}=\begin{vmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{vmatrix}=1$ (auf eins setzen) (=Normalenvektor)

2.A ausrechnen $A=a*a^T=\begin{vmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{vmatrix}*\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{bmatrix}$

3.B ausrechnen $B=\begin{vmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{vmatrix}$

4. $D=\cos(\varphi)*\text{Einheismatrix}+(1-\cos(\varphi))*A+\sin(\varphi)*B$

Drehung um Hauptachsen:

$$D_x=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{bmatrix}\quad D_y=\begin{bmatrix}\cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi)\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi)\end{bmatrix}\quad D_z=\begin{bmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0\\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

□pịegelung an einer E□ene∑: $A*x+B*y+□*z=0$:

$\vec{n}$ = Normalenvektor $=\vec{V_f}\ x\ \vec{V_g}=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+□^2}}*\begin{pmatrix}A\\B\\□\end{pmatrix}$ □.h $\left|\vec{n}\right|=1$

Dreh□inkel $\cos(\varphi)=\frac{\vec{V_f}\circ\vec{V_g}}{\left|V_f\right|*\left|V_g\right|}$

□ = Einheitsmatrix $-2*n*n^T$ □$\left|\vec{n}\right|=1$

Fourierreihen:

$$\omega_0 = \frac{2*\pi}{T} \qquad f = \frac{1}{T} \qquad T = \frac{1}{f}$$

reell : $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k * \cos(k*\omega_0*t) + b_k * \sin(k*\omega_0*t)$

komplex: $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k * e^{j*k*\omega_0*t}$

mit Amplitude und Phase: $\sum_{k=1}^{\infty} A_k * \cos(k*\omega_0*t + {}_k)$

reelle Fourier-koeffizienten a_k und b_k sind Koiffizienten der Fourierreihe:

$$a_k = \frac{2}{T} * \int_0^T f(t) * \cos(k*\omega_0*t) * dt \qquad k = 0, 1, \ldots$$

$$b_k = \frac{2}{T} * \int_0^T f(t) * \sin(k*\omega_0*t) * dt \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$$c_k = \frac{1}{T} * \int_0^T f(t) * e^{-j*k*\omega_0*t} * dt \qquad k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$$

Umrechnung der Fourier-Koeffizienten:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \qquad c_k = \frac{a_k - j*b_k}{2} \qquad c_{-k} = \frac{a_k + j*b_k}{2} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$$a_0 = 2*c_0 \qquad a_k = 2*\square e(c_k) = c_k + c_{-k} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$$b_k = -2*\square m(c_k) = j*(c_k - c_{-k}) \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$$A_0 = \frac{|a_0|}{2} \qquad A_k = \sqrt{a^2{}_k + b^2{}_k} \qquad \tan({}_k) = -\frac{b_k}{a_k} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$$A_0 = |c_0| \qquad A_k = 2*|c_k| \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$${}_k = \arg c_k \qquad k = 0, 1, \ldots$$

$\hat{f}(\omega)$: eine klomplexe Funktion mit Amplituden und Phaseninformation ($\square$pdktrum):

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) * e^{-j*\omega*t} dt$$

retour :

$$f(t) = \frac{1}{2*\pi} * \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) * e^{j*\omega*t} d\omega$$

Dirichelet - Bedingung:

Ist eine T-periodische Funktion $f(t)$ auf dem Intervall $\left[0,T\right]$ stückweise stetig differenzierbar, so gilt für die Fourier-Reihe $S_f(t)$:

-ist f auf dem Teilintervall [a,b] stetig, so konvergiert die S_f auf $[a,b]$ gegen f.

-ist t_0 eine Sprungstelle von f, so gilt:

$$S_f(t_0) = \frac{1}{2} * \left(\lim_{f \to t_0^+} f(t) + \lim_{f \to t_0^-} f(t) \right)$$

das heisst, $S_f(t_0)$ ist in der Mitte der Sprungstellen

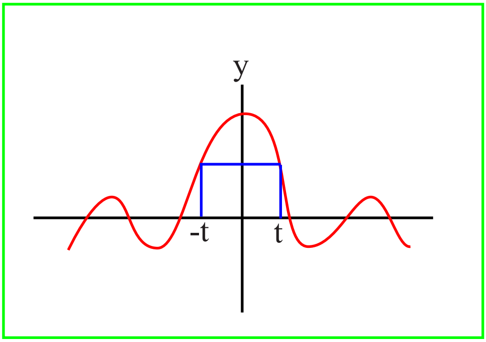
Symmetrie:

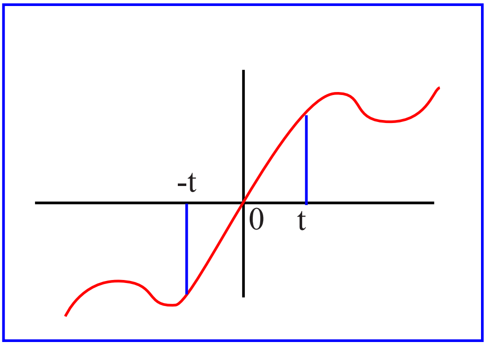
Für die Berechnung der Fourier-Koeffizienten gilt:

-anstelle der Periode [0,T] kann [a,a+T] als Intervall verwendet werden

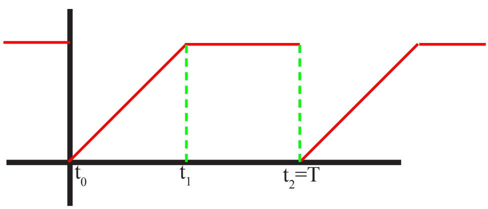
-für Funktionen $f(t) = -f(-t)$ gilt $a_k = 0$ ist ungerade

-für Funktionen $f(t) = f(-t)$ gilt $b_k = 0$ ist gerade





$$c_k = c_{-1} = \text{reelle Funktion}$$



Integralform ausgedrückt duchrch Summe:

$$\int_a^b f(t) * dt$$

$$\approx \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k) * \Delta t$$

komplexe Fourrier ausgedrückt duch Summe:

$$\frac{1}{T} * \int_0^T f(t) * e^{-i*k*\omega*t} * dt$$

$$\approx \sum f(t_k) * e^{-i*k*\omega*t_k} * \Delta t$$

Algemeines

Bandlimitierung :

$$f(t) = \sum_{k=-¥}^{¥} c_k * e^{j*k*2*p*f0} \quad \text{heisst Bandlimitiert, falls } c_k = 0 \text{ für } |k| > \frac{f_{max}}{f_0}$$

Die Funktion ft mit $\hat{f}(w)$ heisst Bandlimitiert mit der maximalen Frequenz f_{max}, falls $\hat{f}(w) = 0$ für $|w| > 2*p*f_{max}$

$$f(t) = 3 + \sin(3*t) + 3*\cos(6*t) \qquad w_{max} = 6 \qquad f_{max} = \frac{w_{max}}{2*p}$$

bei Knick : (Rechteck, Sägezahn, halber Sinus) nie Bandlimitiert!!!!!

DFT Diskrete - Fourier Transformation :

gegeben ein Vektor mit N Elementen $f[k]$, $k = 0,...,N-1$. Die diskrete Fourier - transformation :

$$\hat{f}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] * e^{\frac{-j*k*n*2*p}{N}} \qquad f[n] = \text{Abtastwert}$$

T Signallänge oder Periode
N Anzahl der Samples
f_s Abtastfrequenz
Δt Abtastintervall
$\Delta f = f_0$ Frequenzinkrement

$$\boxed{c_k = c_{-1} = \text{reelle Funktion}}$$

bei Bandlimitierung :

$k £ \frac{f_{max}}{f_0}$ ein K, so das die Fourierreihe endlich wird :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{K} \left(a_k * \cos(k*w_0*t) + b_k * \sin(k*w_0*t)\right)$$

$$f(t) = \sum_{k=-K}^{K} c_k * e^{j*k*w0*t}$$

$f(t)$ ist eindeutig bestimmt durch $2*K+1$ Fourier - Koeffizienten!!!!

$$f_s = \text{Samplingfrequenz} = \frac{N}{T} \qquad Df = \frac{1}{T} \qquad Dt = \frac{1}{f_s} = \frac{T}{N} \qquad f[k] = f(k*Dt)$$

IDFT Inverse Diskrete Fouriertransformation :

$$f(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}[k] * e^{\frac{j*k*n*2*p}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{2*K} \hat{f}[k] * e^{\frac{j*k*n*2*p}{N}}$$

$$f(t_n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{2*K} \hat{f}[k] * e^{j*k*w0*tn}$$

$$c_k = \frac{1}{N} * \hat{f}[k], \quad k ³ 0$$

$$c_{-k} = \frac{1}{N} * \hat{f}[2*K+1-k], \quad k ³ 1$$

Der FFT Algorythmus ermöglicht also die schnelle Berechnung der Fourier - Koiffizienten aus den Abtastwerten der Funktion f(t).

Shannon Theorem :

$$f_{Niquist} = 0.5 f_s \qquad f_{max} < F_{Niquist} = 0.5 f_s$$

für reelle Funktionen gilt :

$c_{-k} = \overline{c_k}$ (konjugiert komplex) daher kann mann $\hat{f}[K+1],...,\hat{f}[N-1]$ ignorieren!!

bei ungerader Anzahl Samples $K = \frac{N-1}{2}$:

$$\begin{array}{cccccccc} \hat{f}[0] & \hat{f}[1] & ... & \hat{f}[K] & \hat{f}[K+1] & ... & \hat{f}[N-1] \\ - & - & & - & - & & - \\ c_0 & c_1 & ... & c_K & c_{-K} & ... & c_{-1} \end{array}$$

bei gerader Anzahl Samples $K = \frac{N-2}{2}$:

$$\begin{array}{ccccccccc} \hat{f}[0] & \hat{f}[1] & ... & \hat{f}[K-1] & \hat{f}[K] & \hat{f}[K+1] & ... & \hat{f}[N] \\ - & - & & - & & - & & - \\ c_0 & c_1 & ... & c_{K-1} & & c_{-(K-1)} & ... & c_{-1} \end{array}$$

Algemeines

Beispiel Man kennt nur die Abtastwerte und will die Koeffizienten:

$$f(t) = 2 + 3 * \cos(2 * p * t) + 5 * \sin(4 * p * t)$$

$$T = 1$$

$$f_0 = 1 \qquad w_0 = 2 * p$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = 2 \qquad c_1 = \frac{a_1 - j * b_1}{2} = \frac{3}{2} \qquad c_2 = \frac{a_2 - j * b_2}{2} = -j * \frac{5}{2}$$

Die Koiffizienten für die negativen Frequenzen nicht vergessen:

$$c_{-1} = \overline{c_1} = \frac{3}{2} \qquad c_{-2} = \overline{c_2} = j * \frac{5}{2}$$

$$A_0 = |c_0| = 2 \qquad A_1 = 2 * |c_1| = 3 \qquad A_2 = 2 * |c_2| = 5$$

$$j_0 = \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}(c_0)}{\mathrm{Re}(c_0)}\right) = 0 \qquad j_1 = \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}(c_1)}{\mathrm{Re}(c_1)}\right) = 0 \qquad j_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}(c_2)}{\mathrm{Re}(c_2)}\right) = -\frac{p}{2}$$

$$T = 1 \qquad f_{max} = 2 \qquad f_s = 5$$

$$c_k = \frac{1}{N} * \hat{f}[k], \qquad k = 0, \ldots, K$$

Beispiel Man kennt die Amlitudenwerte und die Phasen und will die Funktionswerte:

$$f(t) = \sin(2 * p * t) + 0.2 * \cos(10 * p * t)$$

$$T = 1$$

$$Df = f_0 = 1$$

$$f_{max} = 5$$

$$A_1 = 1, \quad j_1 = -\frac{p}{2}, \quad A_5 = 0.2, \quad j_5 = 0$$

komplexe Spektrum ausrechen:

$$c_0 = A_0 * e^{j*j0}, \qquad c_k = \frac{1}{2} * A_k * e^{j*jk}$$

$$c_1 = -\frac{j}{2}, \qquad c_{-1} = \overline{c_1} = \frac{j}{2}, \qquad c_5 = c_{-5} = 0.1$$

$$N = 2 * K + 1$$

$$\hat{f}[k] = N * c_k$$

Algemeines

Divergenz div $\left(\text{Volumen drchgescannt } \lim_{v\to\infty}, \text{ hat Raum Quellen oder Senken}\right): \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}$

Gradient grad $\left(\text{Richtung der grössten Änderung}\right): \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}$

Rotation rot $\left(\text{Fläche zu } \lim_{A\to 0}\right): \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix} x \begin{pmatrix}f_x\\ f_y\\ f_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\\ \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\\ \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\end{pmatrix}$

Maxwell-Gleichungen in Integral-Form:

$\oint \vec{D} \circ \overrightarrow{dA} = 0$ $\qquad\qquad$ $\oint \vec{B} \circ \overrightarrow{dA} = 0$

$$\int \vec{H} \circ \overrightarrow{ds} = \int \left(\vec{s} + \frac{\overrightarrow{dD}}{dt}\right) * \overrightarrow{dA}$$

$$U_{ind} = \frac{d}{dt} * \int \vec{B} \circ \overrightarrow{dA}$$

$$U_{ind} = -\int \vec{E} \circ \overrightarrow{ds} = \frac{dF}{dt} \qquad (\text{Quelle})$$

$$\vec{E} = r * \vec{S}$$

$$\int \vec{E} \circ \overrightarrow{ds} = \int \left(-\frac{\overrightarrow{dB}}{dt}\right) * \overrightarrow{dA}$$

Maxwell-Gleichungen in Differential-Form:

$\text{div } \vec{D} = r$ $\qquad$ $\text{div } \vec{B} = 0$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{S} + \frac{\overrightarrow{dD}}{dt}$$

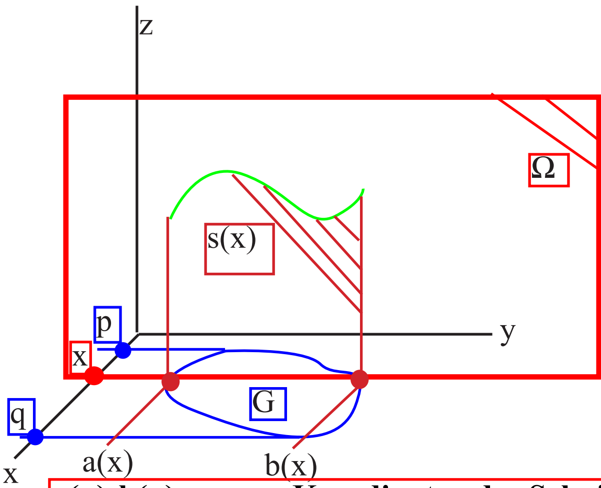
$$\text{rot } \vec{E} = \frac{-\overrightarrow{dB}}{dt}$$

$\vec{B} = m_0 * m_r * \vec{H}$ $\qquad\qquad$ $\vec{E} = e_0 * e_r * \vec{E}$

$$\vec{E}_0 = \vec{v} * \vec{B}_0$$

$$\vec{B}_0 = \vec{E}_0 * \vec{v} * m_0 * e_0$$

Notation von Funktionen mit mehreren Variablen, :



Schnitt parallel zur yz Ebene
Schnittfläche s(x)

Volumenelement dV=s(x)*dx

$$V=\int dV = \int s(x) * dx$$

a(x),b(x) **y-Koordinaten der Schnittpunkte von Ω und dem Gebiet G.**

p,q **kleinste bzw. grösste x-Koordinate eines Punktes auf dem Rand von G.**

s(x) **Inhalt der Fläche zwischen der Schnittkurve und der x-y Ebene.**

$$s(x) = \int_{y=a(x)}^{y=b(x)} f(x,y)dy$$

Das Volumen:

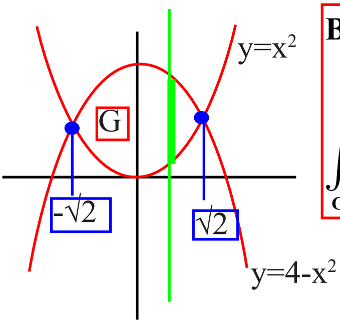
$$V = \int_{x=p}^{x=q} s(x)dx$$

damit:

$$V = \int_{x=p}^{x=q} \int_{y=a(x)}^{y=b(x)} f(x,y)dy, dx \qquad \text{also} \quad \int_G f(x,y)dA = \int_p^q \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)dy, dx$$

$$\text{manchmal (Kreisgrundfläche} = \int_{a(x)}^{b(x)} \int_p^q f(x,y)dy, dx$$

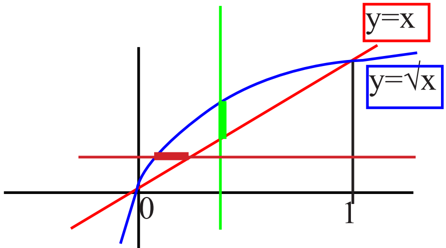
Algemeines



Beispiel : $f(y,x) = x^2(y-1)$

Gebiet G: berandet durch $y = x^2, y = 4 - x^2$

$$\int_G f(x,y)dA = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{x^2}^{4-x^2} x^2(y-1)dy,dx = \frac{32}{15} * \sqrt{2}$$



$$\int_0^1 \int_{y^2}^{y} f(x,y) * dx * dy$$

Beispiel : $f(x,y) = x * y$

Gebiet G : $y = x$ **und** $y = \sqrt{x}$

Schnitt parallel zur y-z Ebene:

$a(x) = x$

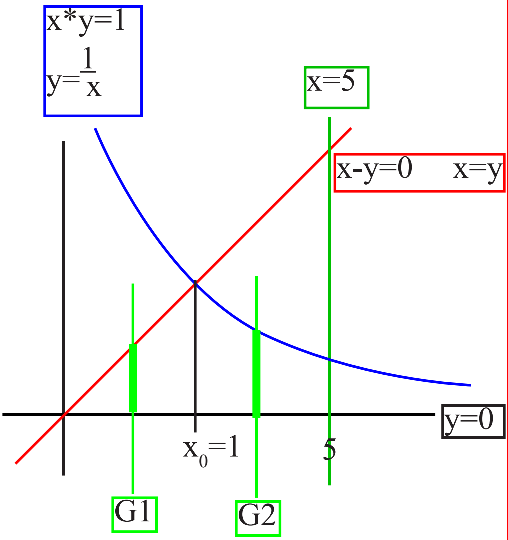
$b(x) = \sqrt{x}$

$p = 0$

$q = 1$

Inhalt $s(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)dy = \int_x^{\sqrt{x}} x * y,dy$

$$\int_G f(x,y)dA = \int_p^q s(x)dx = \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} x * y,dy,dx$$



$f(x,y) = x^2 - y^2$

Gebiet berandet durch :

$x - y = 0$ $\quad y = x$ **//45°**

$x * y = 1$ $\quad y = \frac{1}{x}$ **//Hyperbel**

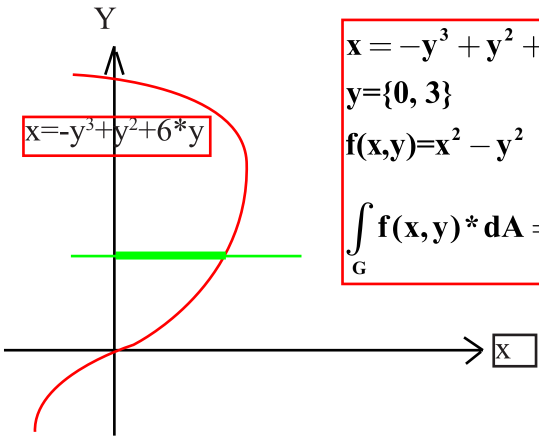
$y = 0$ **//X-Achse**

$x = 5$ **//senkrechte Linie**

$\int_G f(x,y)dA =$ G1 G2

$$\left(\int_0^1 \int_0^x x^2 - y^2 dy,dx\right) + \left(\int_1^5 \int_0^{\frac{1}{x}} x^2 - y^2 dy,dx\right)$$

Algemeines

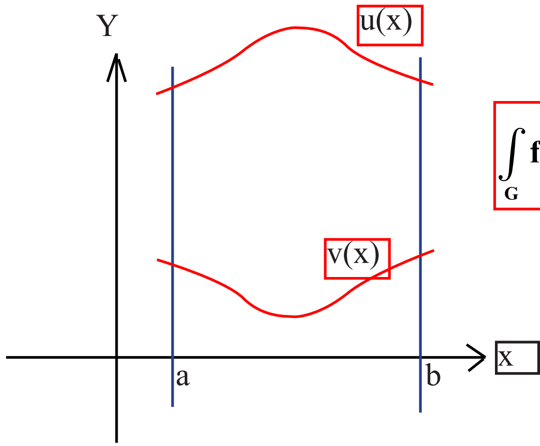


$$x = -y^3 + y^2 + 6*y\ , \qquad x=0$$

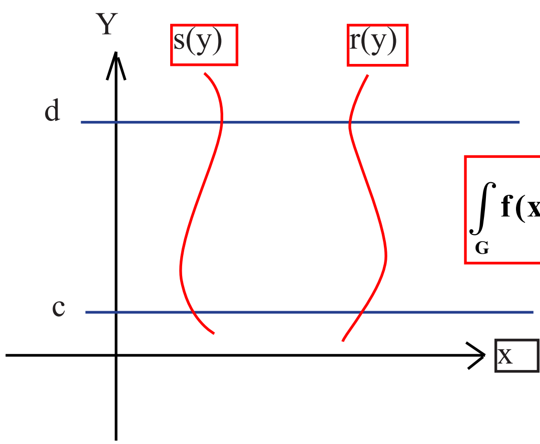
$$y=\{0,\ 3\}$$

$$f(x,y)=x^2 - y^2$$

$$\int_G f(x,y)*dA = \int_{y=0}^{y=3} \int_{x=0}^{x=-y^3+y^2+6*y} x^2 - y^2 * dx * dy$$



$$\int_G f(x,y)*dA = \int_a^b \int_{v(x)}^{u(x)} f(x,y)*dy*dx$$



$$\int_G f(x,y)*dA = \int_c^d \int_{s(y)}^{r(y)} f(x,y)*dx*dy$$

Algemeines

$$|z|^2 = z*\bar{z}$$

$$|e^i| = 1$$

$$i^{641} = i^{640(\text{grösste durch 4 teilbare zahl})} * i^1 = 1*i$$

Kartesische Form oder Normalform:

$$z = x + y*i$$

Trigometrische Form:

$$z = r*(\cos\varphi + i*\sin\varphi)$$

Exponentialform oder Polarform:

$$z = r*e^{i*\varphi}$$

φ **heisst Argument von z, kurz arg(z) Argument Bereich** $-\pi$ **bis** π **(Modulo** π**)**

r ist der Radius von z, $r = |z|$

Kartesisch → trig. Form

$$z = x + i*y$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\arctan\varphi = \frac{y}{x}(+\pi) \quad \text{wenn } x < 0$$

$$z = r*e^{\varphi*i}$$

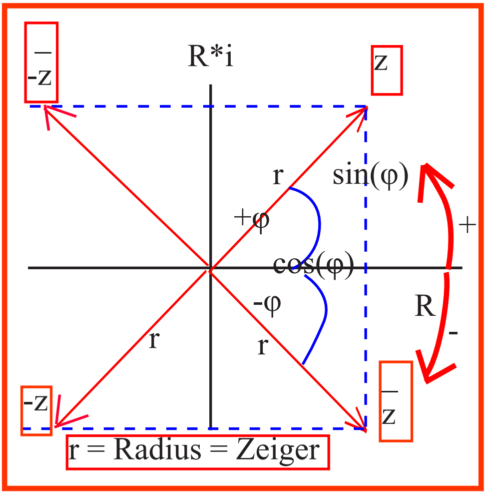
trig. Form → Kartesisch

Umgekehrt:

$$x = r*\cos(\varphi)$$

$$y = r*\sin(\varphi)$$

$$z = z + y*i$$



Multipikation, Division bei trigonometrischen Form:

$$z_1 * z_2 = r_1 * r_2 * \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i*\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} * \left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i*\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$$

Multipikation, Division bei Exponentialform:

$$z_1 * z_2 = r_1 * r_2 * e^{i*(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} * e^{i*(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Potenzen:

$$z = r*e^{i*\varphi}$$

$$z^n = r^n * e^{i*n*\varphi}$$

bei kartesicher Form:

$\rightarrow$ **r und** φ **ausrechnen** $\left(r = \sqrt{x^2+y^2},\quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)(\text{bei } x < 0\ \text{-1□0})\right)$

$$\rightarrow z = e^{x*\pi*i}$$

$$\rightarrow z^n = e^{x*\pi*n*i}$$

$\rightarrow$ **in kartesische Form zur□ck** $\left(y = r*\sin(\varphi) \quad x = r*\cos(\varphi)\right)$

bei e^z **oder** $z^5 = 1$ **mit Wurzel rechnen!**

bei $\bar{z}^{-3} = x \qquad \omega = \bar{z}^{-3}$ **(substitutieren)**

Betrag von $|z - 1 - 2*i| = 1 \rightarrow$ **M Vorzeichenwechsel!**

$\rightarrow$ **Kreis mit** $r = 1$ **und M bei 1 + 2*i**

bei Gleichungssystemen:

wenn möglich, zuerst in Zahlenebene aufzeichnen!!

$$2^{-i} = e^{-i*\ln(2)}$$

$$e^x * e^{i*y} = 7*e^{i*k*2*\pi}$$

$$e^x = 7 \qquad e^{i*y} = e^{i*k*2*\pi}$$

$$x = \ln(7) \qquad y = k*2*\pi$$

$$z = \ln(7) + i*k*2*\pi$$

$$z = \ln(1+i)$$

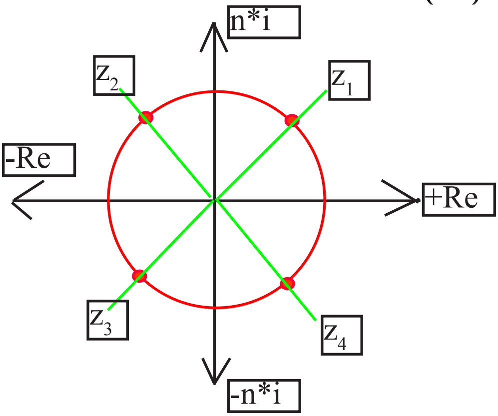
$$e^z = 1 + i = \sqrt{2}*e^{i*\left(\frac{\pi}{4}+k*2*\pi\right)}$$

$$e^z = e^x * e^{i*y}$$

$$x = \ln\left(\sqrt{2}\right) \qquad y = \frac{\pi}{4} + k*2*\pi$$

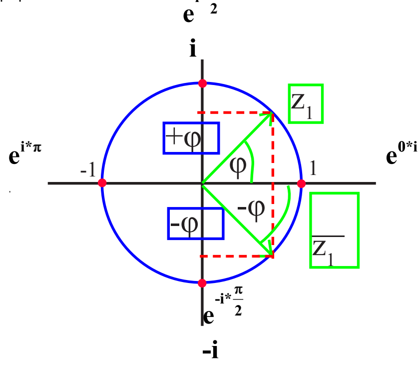
Allgemein:

$$z^n = r^n * e^{i*\left(\frac{\delta + k*2*\pi}{n}\right)} \qquad 0 \le k \le (n-1)$$



Einheitskreise mit $z = r * e^{i*\varphi}$:

$|z| = r = 1$



(1)

n-te Wurzel:

$z^n = a \qquad n = ?$

$r^n * (\cos(\delta) + i * \sin(\delta)) = a_0 * (\cos(\alpha) + i * \sin(\alpha))$

$r^n = a_0 \qquad r = \sqrt[n]{a_0}$

$\delta = \frac{\alpha + k * 2 * \pi}{n} \qquad k \in \mathbb{Z} \quad (0,1,2,3,4......)$

$\sqrt[x]{r} * e^{i*\left(\frac{\alpha + k*2*\pi}{n}\right)}$

Bsp: $z = \sqrt{4 - 2*i} = r * e^{i*\varphi}$

$z^2 = 4 - 2*i \qquad = r^2 * e^{i*2*\varphi} \qquad = \sqrt{20} * e^{i*\alpha}$

$r = \sqrt[4]{20} \qquad \alpha = \arctan\left(\frac{-2}{4}\right)$

$\varphi_1 = \qquad 2*\varphi = \alpha + k*2*\pi \qquad \varphi_1 = \frac{\alpha + 0*2*\pi}{2} \qquad \varphi_1 = \frac{\alpha}{2}$

$\varphi_2 = \frac{\alpha + 1*2*\pi}{2} \qquad \varphi_2 = \frac{\alpha + 2*\pi}{2}$

$z = \sqrt[4]{20} * e^{\varphi*i}$

kon□u□ërt ko□plex:

$z = x + □*i \qquad \overline{z} = x - □*i$

$z = (1 + e^{i*t}) \qquad \overline{z} = (1 + e^{-i*t})$

$z = e^{i*t} = \cos(t) + i*\sin(t)$

$\overline{z} = e^{-i*t} = \cos(t) - i*\sin(t)$

$e^{z_1} * e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$

$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$

$e^{-z} = \frac{1}{e^z}$

$e^z \ne 0$ **für jedes z**

$e^{i*z} + e^{-i*z} = 2*\cos(z)$

$e^{i*z} - e^{-i*z} = 2*i*\sin(z)$

$\cos(z) = \frac{e^{i*z} + e^{-i*z}}{2} = \cosh(i*z)$

$\sin(z) = \frac{e^{i*z} - e^{-i*z}}{2*i} = \frac{1}{2} * \sinh(i*z)$

$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$

$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$

$\cos(z) = \cosh(i*z)$

$\sin(z) = \frac{1}{2}\sinh(i*z)$

$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$

$\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$

...

$i^{-6} = -1$

$i^{-5} = -i$

$i^{-4} = 1$

$i^{-3} = i$

$i^{-2} = -1$

$i^{-1} = i$

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

$i^5 = i$

$i^6 = -1$

...

Zeige, dass $\left|z^{-1}-0.6\right|=0.4$ **den Kreis mit** $M=3+0*i$ **und** $R=2$ **bildet.**

$$\left|z^{-1}-0.6\right|^2=0.4^2$$

$$\left(\frac{1}{z}-0.6\right)*\left(\frac{1}{\bar{z}}-0.6\right)=0.16$$

$$\frac{1}{z*\bar{z}}-\frac{0.6}{z}-\frac{0.6}{\bar{z}}+0.36=0.16 \qquad /*z*\bar{z} \qquad -0.16$$

$$1-0.6*\bar{z}-0.6*z+0.2*z*\bar{z}=0 \qquad /*5$$

$$1-3*\bar{z}-3*z+z*\bar{z}=0$$

$$(z-3)*(\bar{z}-3)-4=0$$

$$\left|z-3\right|^2=4 \qquad \rightarrow \quad \text{Kreis mit } M=3 \text{ und Radius } 4$$

Die Ableitung von f(t) ist:

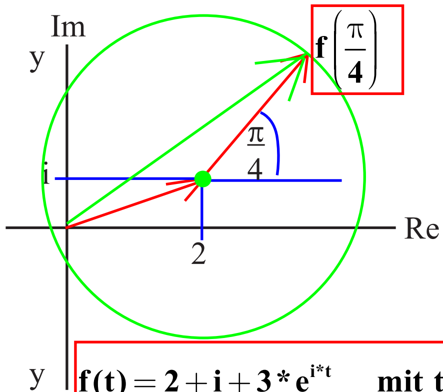
$$f'(t)=x'(t)+i*y'(t)$$

Die Integration von f(t) ist:

$$\int f(t)=\int x(t)+i*\int y(t)$$

Realteil, **Imaginärteil**

Integrations und Ableitungsregeln sind gleich wie beim herkömmlichen Zahlenraum!!!!



$$f(t)=2+i+3*e^{i*t} \qquad \text{mit } t\geq\frac{\pi}{4}$$

TI 89:
Winkel vom Zeiger -> angle
für imaginäres Gleichungssystem -> complex / cSolve
MODE ->Complex Format
->POLAR
->RECTANGULAR (oder REAL)
->RECT (Kartesisches Format)
Funktionen:
MODE -> GRAPH -> PARAMETRIC
HOME: Funktion abspeichern f(t) ->STO Achtung: immer t verwenden als Unbekannte!!!
xt1=Realteil von f(t)
yt1=Imaginärteil von f(t)
F2=Zoom ->ZoomFit

Algemeines

Geometrische Reihe $|q| \leq 1$:

Grundform : $\sum_{k=0}^{\infty} a*q^k$

Eine geometrische Reihe ist eine (unendliche) Zahlenfolge der Gestalt:

$s_1 = a,\ s_2 = a + a*q,\ s_3 = a + a*q + a*q^2, \ldots,$

$s_n = a + a*q + a*q^2 + \ldots + a*q^{n-1}$

s_n **heisst die n-te Partialsumme**

$$\sum_{k=1}^{\infty} a*q^{k-1} = \frac{a}{1-q}$$

$$s_n = a*\frac{1-q^n}{1-q}, \quad \text{sofern } q \neq 1$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}, \quad \text{für } |q|<1 \quad = a + a*q + a*q^2 + a*q^3 \ldots$$

$$E(\text{Fehler}) = \left|\frac{a}{1-q} - s_n(\text{Partialsumme})\right| = \left|\frac{a}{1-q} - a*\frac{1-q^n}{1-q}\right| = \left|\frac{a}{1-q}\right| * |q|^n$$

$$E_n(\text{Wert}) = \frac{a}{1-q(\text{Wert})} * |q*(\text{Wert})|^n$$

Funktionsreihen:

Grundform: $\sum_{k=0}^{\infty} a*x^k$ **q ist variabel = x**

für den Grenzwert, falls er existiert f(x)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\cos(x))^{k-1}$$

$a = 1 \qquad q = x \qquad \varepsilon_{15}$ **an der Stelle** $x = 3$

$$\varepsilon_{15} = \left|\frac{a}{1-q}\right| * |q|^n = \left|\frac{1}{1-\cos(3)}\right| * |\cos(3)|^{15}$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}*(x_0)}{k!} * (x-x_0)^k \qquad a_k$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} * x^k \quad \text{für jedes } x \in \Re$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2*k)!} * x^{2*k} \quad \text{für jedes } x \in \Re$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k * x^{k+1}}{k+1} \quad \text{für } |x| < 1$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2*k+1)!} * x^{2*k+1} \quad \text{für jedes } x \in \Re$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2*k+1)} * x^{2*k+1} \quad \text{für } |x| \leq 1$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad \text{für } x \in (-1,1)$$

Potenzreihen :

Grundform : $\sum_{k=0}^{\infty} a_k * (x - x_0)^k$ **x_0 ist Entwicklungpunkt a_k sind Koeffizienten**

$$r(\text{Konvergenzradius}) = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

ist r der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k * (x-x_0)^k$ **so konvergiert die Potenzreihe für jeden Wert x mit** $|x - x_0| < r$ **und sie divergiert für alle x-Werte mit** $|x - x_0| > r$

x_0 bei minus +, bei + minus

a_{n+1} muss überall wo n vorkommt +1 gerechnet werden

Bsp :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k} \qquad x_0 = 2,\ a_k = \frac{1}{k}$$

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|1 + \frac{1}{n}\right| = 1$$

Potenzreihen dürfen Summandenweise integriert werden.

$$\int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} * \left(-t^2\right)^k\right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} * (-1)^k * \int_0^x t^{2*k} * dt$$

Konvergenzradius :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n * \frac{n}{2^n} * x^{2*n}$$

substitution $x^{2*n} = x^2 = t$

$$a_k = \frac{(-1)^n * n}{2^n} \qquad a_{k+1} = \frac{(-1)^{n+1} * n+1}{2^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \left|\frac{(-1)^n * n * 2^{n+1}}{2^n * (-1)^{n+1} * n+1}\right| = \left|\frac{2*n}{(n+1)}\right| =$$

$$\left|2*\frac{n}{n+1}\right| = \left|2*\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}\right| = \left|2*\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right| = 2$$

Rücksubstitution :

$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$